

## Bibliografía:

- [Sp] **M. Spivak.** CALCULUS. Ed. Reverté  
 [L] **S. Lang.** CÁLCULO. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana  
 [St] **S. Stein.** CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA. Ed. McGraw-Hill  
 [LHE] **Larson-Hostetler-Edwards.** CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA. Ed. McGraw-Hill  
 [A] **T. Apostol.** CALCULUS. Ed. Reverté  
 [CJ] **Courant-John.** INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO Y AL ANÁLISIS MATEMÁTICO. Ed. Limusa-Wiley  
 [B] **J. Burgos.** CÁLCULO INFINITESIMAL DE UNA VARIABLE. Ed. McGraw-Hill  
 [K] **K. Kuratowski.** INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO. Ed. Limusa-Wiley  
 [AG] **Abellanas-Galindo.** MÉTODOS DE CÁLCULO. Ed. McGraw-Hill

Elaborar unos apuntes de una asignatura tiene la ventaja para los alumnos de precisar qué es lo que en concreto se va a explicar durante el curso. Además les permite no estar todo el rato pendientes de copiar a la mayor velocidad posible (con los errores que ello produce) todo lo que se escribe en la pizarra. Pero tiene también sus claras desventajas. La existencia de los apuntes suele incitarles a utilizar poco otros libros, que dan otras visiones de la asignatura y que tratan diferentes temas con más extensión, ejemplos, aplicaciones o rigor (según los casos) que en dichos apuntes.

Es importante, como se acaba de decir, consultar libros. El problema fundamental de la bibliografía para un curso de Cálculo de primer curso es que no existe 'el libro adecuado' a todos los estudiantes, pues éstos llegan a la universidad con muy diferente formación matemática. El ideal sería que toda persona de primero de Físicas pudiera seguir sin excesivo esfuerzo un libro tan bonito como el Spivak. Pero ese ideal dista mucho de la realidad.

En teoría, en las asignaturas de matemáticas del bachillerato se han tratado (está escrito en los programas oficiales) bastantes temas de los que se va a profundizar en Cálculo I. Por ejemplo: números reales, inecuaciones, sucesiones, rectas, trigonometría, exponenciales y logaritmos, concepto intuitivo de límites, derivación, gráficas, primitivas sencillas, cálculo de áreas u operaciones elementales con complejos. Según esto, sólo parte de los temas de Cálculo I se verían por primera vez: todo lo relativo a series, la definición rigurosa de límites, los desarrollos de Taylor, las sucesiones de funciones, el cálculo de primitivas complicadas, las integrales impropias y pocas cosas más (además del cambio que suele representar la insistencia de los profesores universitarios en 'las demostraciones').

La experiencia dice que, aunque hay un porcentaje digno de estudiantes que sí controlan buena parte de los citados temas del bachillerato, hay otra parte (por desgracia no muy minoritaria) con demasiados agujeros en su formación. Para los primeros, los libros clásicos de Cálculo ([Sp], [A] o [CJ]) son el complemento natural de estos apuntes (el [A] tiene temas además de otras asignaturas: Álgebra, Cálculo II, Ecuaciones Diferenciales,...). Pero para estudiantes de menor nivel matemático es preferible manejar libros más elementales, como el [L], [St] o [LHE], que contienen muchos más ejemplos sencillos (aunque no incluyen los temas más complicados del curso: diferentes demostraciones, convergencia uniforme, impropias...).

Los seis libros anteriores tratan (al contrario que en el programa de Cálculo I) primero las funciones y luego las sucesiones y series. Los dos siguientes ([B] y [K]) sí organizan los temas como nosotros. El [K] es difícil de leer (y de encontrar), pero es citado porque de él se han extraído algunas demostraciones de estos apuntes. Por último, el [AG], aunque no ofrezca demostraciones, es interesante por los muy variados temas que trata y los problemas que contiene.

Las hojas de problemas comunes a todos los grupos de Cálculo I y los adicionales de estos apuntes son más que suficientes para el curso. Pero en todos los libros de la bibliografía hay más problemas propuestos y resueltos. Si algún amante de las matemáticas quiere problemas más teóricos y complicados, que no dude en enfrentarse a los del [Sp]. Pero probablemente sea mayor el número de quienes echan en falta en nuestros problemas ejercicios sencillos que permitan repasar los temas del bachillerato. En [L], [St] o [LHE] se pueden encontrar cientos de ellos.

[**Novedades en la versión 2001** de los apuntes: sólo se han corregido erratas, se han incluido los comentarios bibliográficos de arriba y se han añadido a los problemas adicionales los problemas de los exámenes del curso pasado 2000-2001]

**PROBLEMAS ADICIONALES NO INCLUIDOS EN LAS HOJAS COMUNES**

**CÁLCULO I****grupo E****PROB 1**

- 1) Hallar el mcd y el mcm de: i) 1995 y 9009 , ii) 12345 y 67890 , iii) 135, 315 y 351 .
- 2) Probar que  $\sqrt{3}$  y  $\sqrt[3]{2}$  son irracionales.
- 3) Probar que si  $a, b, c, d > 0$  y  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  entonces  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$  .  
Encontrar un racional y un irracional que sean mayores que  $11/17$  y menores que  $9/13$  .
- 4) En dos partidos de baloncesto sucesivos un jugador ha obtenido un porcentaje de acierto en tiro de tres puntos superior al de otro jugador. ¿Implica esto que en el conjunto de los dos partidos es más alto el porcentaje del primer jugador?
- 5) Demostrar que la media geométrica de dos números positivos  $x$  e  $y$  es menor o igual que la aritmética, es decir, que  $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$  si  $x, y > 0$  . ¿Cuándo coinciden?
- 6) Determinar si cada afirmación es cierta o falsa:  
 $x < y \implies x^{-1} > y^{-1}$  ;  $x < y \implies x^3 < y^3$  ;  $0 < x < y \implies 3x^2 < x^2 + xy + y^2 < 3y^2$  ;  $|x-5| < 2 \iff 0 < x < 8$  ;  
 $x < 5 \iff |x| < 5$  ;  $|x| < 5 \iff x < 5$  ;  $x$  con  $|x-1| = |2-x|$  ;  $x$  con  $|x-1| = -|2-x|$  ;  $x^2 - 1 \leq |x^2 - 1| \leq x^2 + 1$  ;  $x$
- 7) Probar que si  $A$  y  $B$  son conjuntos abiertos entonces  $A \cup B$  y  $A \cap B$  son también abiertos. Más en general, ¿es abierto el conjunto unión de una sucesión infinita de conjuntos abiertos?, ¿lo es su intersección?. Deducir propiedades análogas para conjuntos cerrados.
- 8) ¿Qué forma tienen las sucesiones convergentes cuyos términos son todos enteros?
- 9) Sea  $a_n, b_n, c_n$  . Probar que: i)  $a_n \leq L, c_n \leq L \implies b_n \leq L$  ; ii)  $b_n \leq c_n$  ; iii)  $b_n - a_n = c_n - a_n$  .
- 10) Sean:  $c_n = 0$  ,  $b_n = 1$  ,  $i_n = n$  ,  $d_n = -n$  y  $a_n$  es acotada. ¿Qué se puede afirmar sobre la convergencia de:  
 $\{i_n + d_n\}$  ,  $\{c_n + a_n\}$  ,  $\{c_n i_n\}$  ,  $\{i_n a_n\}$  ,  $\{b_n a_n\}$  ,  $\{c_n/a_n\}$  ,  $\{b_n/c_n\}$  ,  $\{i_n/d_n\}$  ,  $\{i_n^{c_n}\}$  ,  $\{b_n^{i_n}\}$  ?
- 11) Demostrar que si  $\{a_n\}$  es acotada y sus únicos puntos de acumulación son  $10^7$  y  $10^{-7}$  , y la sucesión  $\{b_n\}$  diverge hacia  $+$  , entonces la sucesión  $\{a_n b_n\}$  es divergente hacia  $+$  .
- 12) Hallar una sucesión cuyos 5 primeros términos sean  $-1, 3/2, -5/6, 7/24, -9/120$  y determinar si converge.
- 13) ¿Cuánto vale  $\sum_{k=1}^n 1$  ? ¿Cuánto vale  $\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k-1})$  ,  $n \geq m$  ? ¿Es  $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_k} = \sum_{k=1}^n 1$  ?
- 14) Una pelota cae desde una altura inicial de 1m sobre una superficie horizontal. Si en cada rebote alcanza un 80% de la altura anterior, ¿qué distancia recorre hasta pararse?, ¿cuánto tiempo emplea?
- 15) Una persona y su perro caminan a una velocidad de 1 m/s hacia su casa. A 100 m de la puerta el perro comienza a correr yendo y viniendo de la persona a la puerta a 4 m/s , hasta que la persona entra en casa. ¿Qué distancia recorre el perro desde que empieza a correr?
- 16) Comprobar sumando tres y cuatro términos que  $0.8414 < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} < 0.8417$  .  
¿Cuántos términos habría que sumar para estimar la suma con error menor que  $10^{-5}$  ?
- 17) Probar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+5^n}$  converge y que su suma está entre 0.213 y 0.215 .  
[Usar los tres primeros términos y acotar el resto mediante una serie geométrica]
- 18) Encontrar todos los valores de  $a \in \mathbf{R}$  para los que converge la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + 2}{e^n + n}$  .

## CALCULO I

## grupo E

## PROB 2

- 1) Hallar la ecuación de la recta que pasa por  $(-1,4)$  y  $(2,-5)$ . Hallar y dibujar la función inversa  $y=f^{-1}(x)$  de la función  $y=f(x)$  definida por la recta anterior. Escribir las funciones compuestas  $f^2 \circ [f^{-1}]^2$  y  $[f^{-1}]^2 \circ f^2$ .
- 2) Sean  $C(x)=x^2$ ;  $R(x)=\sqrt{x}$ ;  $L(x)=1-x$ . Determinar en qué intervalos es  $f=R \circ C \circ L$  inyectiva, hallando la  $f^{-1}$  en cada intervalo. Expresar la función  $g(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$  como composición de  $C$ ,  $R$  y  $L$  y precisar su dominio.
- 3) Hallar (sin calculadora) los siguientes valores (en el caso de que existan):
 

$\cos(-\frac{13}{3})$	$\sin \frac{\pi}{8}$	$\sin \frac{7}{12}$	$\tan \frac{5}{4}$	$\arctan(\tan \frac{5}{4})$	$\arcsen(\arccos 0)$	$\operatorname{ch}(\log 3)$
$[\cos \frac{3}{4}]^{1/4}$	$125^{2/3}$	$e^{3 \log 4 - \log 5}$	$\log_2 64$	$\log(\log(\log 2))$	$\cos(\arctan 17)$	$[\operatorname{sh}(-1)]$
- 4) Hallar todos los números reales  $x$  tales que: i)  $e^{2|\log x|} < 8x$ , ii)  $|\tan x| > 1$ .
- 5) Expresar  $\operatorname{sen} x$  y  $\operatorname{cos} x$  en función de  $\tan \frac{x}{2}$ . Probar que  $\tan \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{cos} x}$ .
- 6) Comprobar que:  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ ;  $1/\operatorname{ch}^2 x = 1 - \operatorname{th}^2 x$ ;  $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ ;  $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ .
- 7) Sean  $f(x) = \frac{2x - \operatorname{sen} x}{x + 2 \operatorname{sen} x}$  y  $L$  el límite de  $f$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Determinar un  $M$  tal que  $|f(x) - L| < 0.1$  si  $x > M$ .
- 8) Probar que  $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ ,  $f(0)=0$  y  $g(x) = \sqrt{|x|} - 5x$  son continuas en  $0$  utilizando la definición  $\epsilon - \delta$ . En particular, determinar un  $\delta$  para  $\epsilon = 1$  y  $\epsilon = 0.01$ .
- 9) Describir todas las funciones  $f$  que cumplen las siguientes condiciones:
 

a)  $\delta > 0$ :  $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon$ ; b)  $\delta > 0$ :  $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon$
- 10) Sean  $f(x) = [\frac{1}{x}]$ ,  $x > 0$ ;  $g(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ ,  $g(0)=0$ ;  $h(x) = \frac{\tan x}{x^2}$ ;  $k(x) = \begin{cases} |2-x| & \text{si } x < 3 \\ x-4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$   
 Determinar los puntos  $a$  para los que dichas funciones tienen límite en  $a$ ; son continuas en  $a$ ; poseen límites laterales en  $a$ . Ver si tienen límite cuando  $x$  tiende a  $\infty$ .
- 11) Determinar (si existen) los límites siguientes:
 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{sen}|x|-x}-1}{1-\log(x+\operatorname{cos} x)}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{7x}; \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{3+2x}{x+5x^2} - \frac{3}{x} \right]; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \operatorname{sen}(2x)}{2x+3\operatorname{sen}(4x)}; \lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{2x^2} - \sqrt{2x^2-6x}]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x}{x}; \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{th}(\operatorname{ch} x - \operatorname{cos} x); \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1}; \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{2}{\log x} - \frac{3}{\sqrt{\log x}} \right]; \lim_{x \rightarrow 1} e^{-1/|x-1|}; \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{sh}(\log x)$$
- 12) Determinar si convergen las series:  $3^{n \cos 2}$ ;  $(-1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ ;  $\tan \frac{1}{n}$ ;  $\arccos \frac{1}{n}$
- 13) Supóngase que  $f$  es continua en  $[a,b]$  y que  $f(x)$  es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de  $f$ ?
- 14) Supóngase  $f$  continua en  $[a,b]$  y sea  $c$  un número cualquiera. Demostrar que existe un punto de la gráfica de  $f$  en  $[a,b]$  para el que la distancia a  $(c,0)$  se hace mínima. ¿Es cierto lo anterior si sustituimos  $[a,b]$  por  $(a,b)$ ? ¿Y si sustituimos  $[a,b]$  por  $\mathbf{R}$ ?

## CALCULO I

## grupo E

## PROB 3

- 1) Hallar las derivadas de las funciones inversas  $(\operatorname{sh})^{-1}$ ,  $(\operatorname{ch})^{-1}$  y  $(\operatorname{th})^{-1}$ .
- 2) Demostrar que la derivada de una función par es impar y viceversa. ¿Es periódica la derivada de una función periódica?
- 3) Un astronauta viaja de izquierda a derecha sobre la curva  $y=x^2$ . Al desconectar el cohete viajará a lo largo de la tangente a la curva en el punto en que se encuentre. ¿En qué punto debe desconectar para alcanzar i) (4,9), ii) (4,-9)?
- 4) Hallar la ecuación de la elipse con sus ejes paralelos a los coordenados y centrada en el origen que tiene por tangente la recta  $5y+4x=25$  en un punto de abscisa  $x=4$ .
- 5) Dibujar la gráfica de  $f(x) = |4x-3| - x^2$ . Determinar los valores máximo y mínimo que alcanza la función  $f$  en el intervalo  $[-3,3]$ . ¿Existe algún  $x \in (0,2/3)$  para el que  $f(x)=0$ ?
- 6) Sean  $P(x) = x^5+3x^4-7x^3-21x^2+10x+30$  y  $Q(x) = x^3-3x^2-5x+15$ . Hallar el  $\operatorname{mcd}(P,Q)$ . Hallar todas las raíces de  $P$  y de  $Q$ . Realizar el producto  $P \cdot Q$  y la división  $P/Q$ .
- 7) Probar que  $P(x) = 2x^5+3x^4+4x^3+6x^2+2x+3$  tiene raíces múltiples y hallar todas sus raíces.
- 8) Probar que el cambio  $z=x+\frac{1}{x}$  convierte  $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$  en una ecuación de segundo grado en  $z$ .
- 9) Hallar todas las soluciones de:  $x^4+2x^2+8x+5=0$ ,  $x^4+1=0$ ,  $3x^4-7x^3-7x+3=0$ .
- 10) Precisar cuántas raíces de los siguientes polinomios hay en los intervalos que se indican:  
 $P(x)=3x^3-x^2+x-1$  en  $(-,0)$  y en  $(1,)$        $P(x)=x^4+x^3+x^2+x$  en  $(-,0)$  y en  $(0,1)$   
 $P(x)=x^4+8x-1$  en  $(-3,-2)$  y en  $(0,1)$        $P(x)=2x^5+8x^3+5x-6$  en  $(-,0)$  y en  $(0,)$
- 11) Probar que el polinomio  $P(x)=x^5+x+9$  tiene una única raíz real. Encontrar, utilizando el teorema de Bolzano, un intervalo de longitud  $1/4$  en el que se encuentre dicha raíz. Precisar el valor de la raíz utilizando el método de Newton.
- 12) Sean los polinomios cúbicos:  $x^3+x-17$ ,  $2x^3-7x^2+1$ ,  $16x^3-12x^2+1$ . i) Dibujar sus gráficas. ii) Hallar sus raíces reales a partir de las fórmulas de los apuntes. iii) Hallar aproximadamente dichas raíces utilizando el método de Newton.
- 13) Hallar aproximadamente todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:  
 $3x^3-2x^2-6x+4=0$ ;  $x^4+4x^2-1=0$ ;  $x^5+x+1=0$ ;  $x \operatorname{sen} x + \cos x = x^2$ ;  $x \operatorname{th} x = 1$ ;  $\log|x|=x-1$
- 14) Hallar aproximadamente los cortes con  $y=0$ , los extremos y los puntos de inflexión de  
 $P(x) = 9x^4+8x^3+28x^2+24x+3$ ,  $Q(x) = 2x^5-15x^3+20x^2+5x+3$  y  $f(x) = e^x - x^3$
- 15) Aplicar el método de Newton partiendo de  $x_0=1$  a las funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ .
- 16) Ver que  $f(x)=e^{x/3}$  es contractiva en  $[0,2]$  y aproximar el único cero de  $x=e^{x/3}$  en dicho intervalo.
- 17) Dibujar las gráficas de las funciones:  
 $3x^4-4x^3$  |  $\frac{x}{x^2+1}$  |  $\frac{x^2-4x+5}{x-2}$  |  $\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$  |  $x^3\sqrt{4-x^2}$  |  $3x^{2/3}+2x$  |  $3 \operatorname{sen}(x-2)$  |  $\frac{x}{4} - \sec x$   
 $1+|\tan x|$  |  $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$  |  $\cos^2 2x - |\cos x|$  |  $\arcsen \frac{1-x^2}{1+x^2}$  |  $e^{-|x|}$  |  $e^{-x^2}$  |  $\frac{1}{2e^x-1}$  |  $\log(x^2-x)$
- 18) Dibujar las curvas:  $x^2+y^2+2x-4y=0$  |  $x^2-xy+y^2=3$  |  $4x^2-y^2-8x=12$  |  $x^2y^2=x^2-1$
- 19) Un globo se eleva verticalmente desde el suelo a 100m de un observador, a una velocidad de 2m/s. ¿A qué ritmo crece el ángulo de elevación de la línea de visión del observador cuando el globo está a una altura de i) 10m, ii) 100m?
- 20) Un tren parte de una estación en línea recta hacia el norte a 100km/h. 12 minutos después parte otro hacia el este a 50km/h. ¿A qué ritmo cambia la distancia entre los trenes 1 hora después de la partida del segundo?
- 21) Hallar el valor mínimo de la suma de los arcos tangentes de dos reales  $\theta_1, \theta_2$  cuya suma sea  $\pi$ .
- 22) Hallar los puntos de la gráfica de  $f(x) = \left[6 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}\right]^{1/2}$  situados a mayor y menor distancia del punto (4,0).
- 23) Hallar el punto de la recta tangente a la curva  $x^2+y^2=4$  en el punto  $(1,-\sqrt{3})$  que esté más próximo al punto (2,0).

## CALCULO I

## grupo E

## PROB 4

- 1) Escribir el polinomio  $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$  ordenado en potencias de  $(x-2)$ .
- 2) Calcular  $P_3$ , el polinomio de Taylor de grado 3 en  $x=0$  de  $f(x) = \tan x$ .  
Determinar si  $P_3(1)$  es mayor o menor que  $\tan 1$  sin utilizar calculadora.
- 3) Hallar los polinomios  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$  de interpolación de  $\cos x$  en los puntos  $x$  siguientes: 1) 0 y  $\pi/3$ ,  
2) 0,  $\pi/3$  y  $\pi/2$ , 3) 0,  $\pi/6$ ,  $\pi/3$  y  $\pi/2$ . Utilizar  $Q_1$  y  $Q_2$  para aproximar el  $x$  tal que  $\cos x = x$ .
- 4) Hallar el  $A_4$  de la fórmula de interpolación de Newton para puntos equidistantes.  
Hallar el  $Q_4$  que interpola  $\sin^2(x)$  en 0,  $1/4$ ,  $1/2$ ,  $3/4$  y 1. Aproximar con él  $\sin^2(7/12)$ .
- 5) Estudiar en qué subconjuntos de  $\mathbf{R}$  converge uniformemente  $f_n(x) = \cos^n x$ .
- 6) Estudiar la convergencia puntual y uniforme en el intervalo  $[0,1]$  de:  
a) la sucesión de funciones  $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n^3+x}}$ ,  $n=1,2,3,\dots$ ; b) la serie  $\sum f_n(x)$ .
- 7) Determinar los valores de  $x$  para los que la serie  $\sum (-2x)^{3n}$  es convergente. Decidir si converge para  $x = \arctan \frac{3}{5}$ .
- 8) Sea  $f(x) = x(1+x^3)^{-1/5}$ . Hallar los 3 primeros términos no nulos de su desarrollo de Taylor en  $x=0$ .  
Aproximar por un racional  $f(1/2)$  con error menor que 0.001.
- 9) Calcular el valor de  $\sqrt[10]{1.2}$  con error menor que 0.01. Hallar el valor de  $\sqrt{1/2}$  a partir de un polinomio de Taylor de orden 3 y dar una cota del error cometido.
- 10) Hallar el desarrollo de Taylor hasta  $x^6$  de la función  $f(x) = [36+x^3]^{-1/2}$ .  
Hallar un racional que aproxime con error menor que  $10^{-2}$ : i)  $f(2)$ , ii)  $f(-1)$ .
- 11) Escribir el desarrollo en serie de  $(1-x^2)^{-1/2}$ . Deducir a partir de él los primeros términos del desarrollo de  $\arcsen x$ .
- 12) Hallar un polinomio cúbico  $P(x)$  tal que  $\frac{x \cos x - P(x)}{(x-1)^3}$  tienda a 0 cuando  $x$  tiende a 1.
- 13) Sea  $f \in C^4$ . Probar que  $f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} + o(h)$  y que  $f''(a) = \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} + o(h)$ .  
Si  $f(x) = 4^x$ , aprovechar lo anterior para aproximar  $f'(0)$  y  $f''(0)$  tomando  $h=1/2$ .
- 14) Calcular los siguientes límites indeterminados cuando  $x$  tiende al  $a$  indicado:  

$$a=0: \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2}, \quad \frac{\log[\cos(2x)]}{\log[\cos(3x)]}; \quad a=0^+: \left[ \frac{1}{e}(1+x)^{1/x} \right]^{1/x};$$

$$a=1^-: \log x \log(1-x); \quad a=1: \frac{1 - x \arctan[1/x]}{1 - \cos[1/x]}; \quad \left[ \cos \frac{1}{x} \right]^{\log x}.$$
- 15) Hallar el límite cuando  $x$  tiende a 0,  $0^-$ ,  $-1^+$  de:  

$$\frac{\log(1+2x^2) - \log(1+x^2)}{\arctan(x^2)}; \quad x \left[ \cos \frac{1}{x} - 1 \right]; \quad \frac{x - \sin x}{x \arctan(x^2)}; \quad \frac{\arctan x - \sin x}{x(\cos x - \cos x)}$$
- 16) Hallar el límite cuando  $x \rightarrow 0$  para el único valor de  $a$  para el es finito:  $\frac{\cos x - e^{ax}}{\sin x + \log(1-x)}$ ;  $\frac{\sin x}{x^3} - \frac{a}{x^2}$ .
- 17) Determinar para qué valores de  $b$  existe el límite de  $x^{-b} [\sqrt{1+9x^4} - 1]$  si i)  $x \rightarrow 0^+$ , ii)  $x \rightarrow \infty$ .
- 18) Calcular el límite de las sucesiones (utilizar técnicas de cálculo de límites de funciones y justificar los pasos):  

$$a_n = n^{-1} \log_2 n + n^2 2^{-n} \quad \left| \quad b_n = \frac{n^2-1}{3n} \sin \frac{n}{n^2-1} \quad \right| \quad c_n = n^3 \left( 1 - \cos \frac{1}{n} \right) \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$
- 19) Usando el teorema del valor medio encontrar el límite de la sucesión  $a_n = n^{1/3} - (n+1)^{1/3}$ .

20) Dibujar las gráficas de las siguientes funciones:

$$x \log x^2 - x^2 \quad \left| \quad 6 \log|x| + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} \quad \right| \quad x \arctan \frac{1}{x} \quad \left| \quad e^{-1/x} \quad \right| \quad e^{-1/x^2} \quad \left| \quad x^{-1} e^{-x} \quad \right| \quad x^{-3} e^{-6/x} \quad \left| \quad \operatorname{th} \frac{1}{x} \quad \right| \quad x^{1/x}$$

21) Sea  $f(x) = \sin x - x \cos x$ . Dibujar su gráfica. Precisar para qué  $m$  existe el límite de  $x^{-m} f(x)$  si i)  $x \rightarrow 0$ , ii)  $x \rightarrow \infty$ .

22) Sea  $f(x) = e^{4/x} - 4/x^2$ ,  $f(0) = 0$ . Determinar los puntos en que  $f$  es continua y derivable. Hallar máximos, mínimos y puntos de inflexión. Estudiar asíntotas. Dibujar la gráfica. Utilizando  $P_{1,1}$ , polinomio de Taylor de grado 1 en  $x=1$ , dar un valor aproximado de  $f(1.1)$ . Determinar sin calculadora si el valor aproximado es mayor o menor que el exacto.

23) i) Dada  $g(x) = \sin^2(1/x)$ , evaluarla en  $x=4/n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , y esbozar su gráfica usando estos datos. ¿Converge la sucesión  $\{g(4/n)\}$ ? ¿Posee alguna subsucesión convergente?

ii) Sea  $f(x) = x \sin^2(1/x)$  si  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ . Justificar si es  $f$  continua y derivable en  $x=0$ . Determinar el límite de  $f$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Hallar los mínimos de  $f$  en  $x > 0$ . Estudiar concavidad y convexidad. Dibujar la gráfica de  $f$ . Probar que el máximo absoluto de  $f$  en todo  $\mathbf{R}$  se alcanza en un  $x$  del intervalo  $[2,3]$ .

## CALCULO I

## grupo E

## PROB 5

- 1) Utilizando exclusivamente la definición de integral calcular  $\int_0^1 x \, dx$  e  $\int_1^2 x^{-2} \, dx$ .
- 2) Sea  $f$  acotada en  $[a,b]$ . Determinar si las siguientes implicaciones son verdaderas o falsas:
 

$f \in C^1[a,b]$	$f$ integrable en $[a,b]$	$f$ integrable en $[a,b]$	$f$ alcanza su máximo en $[a,b]$
$f$ crece en $[a,b]$	$f$ integrable en $[a,b]$	$f$ integrable en $[a,b]$	$\int_a^b f^2 = \left[ \int_a^b f \right]^2$
- 3) Aproximar  $e$  con la definición  $\log x = \frac{x}{1} \frac{dt}{t}$  y las desigualdades  $t^{-21/20} < t^{-1} < t^{-19/20}$  si  $t > 1$ .
- 4) Sea  $f$  definida por:  $f(x) = -1$  si  $x \in (0,1)$ ;  $f(x) = 3-2x$  si  $x \in (1,2)$ ;  $f(0)=f(1)=f(2)=0$ .  
 Hallar  $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$  y  $\phi(x) = \int_0^x F(t) \, dt$  para los  $x \in [0,2]$  que exista.  
 Determinar dónde tiene primera y segunda derivadas, calculando  $\phi'$  y  $\phi''$ .
- 5) Si  $F(x) = x \int_0^x e^{t^2} \, dt$ , hallar  $F''(5)$ .
- 6) Sea la función  $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$ . a) Estudiar si es derivable en  $x=0$ . b) Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de  $f$  en el intervalo  $[-4,1]$ . c) Calcular la integral  $\int_{-4}^4 f(x) \, dx$ .
- 7) i) Determinar para todo  $n \in \mathbf{N}$  en qué  $x > 0$  alcanza su valor máximo la función  $f_n(x) = \frac{2x}{x^3 + 6n^6}$ .  
 ii) Probar que la serie de funciones  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente en  $[0, \infty)$ .
- 8) Expresar  $I_n(x) = \frac{dx}{[x^2+a^2]^n}$  en función de  $I_{n-1}(x)$ . Calcular  $\frac{dx}{[x^2+1]^2}$  y  $\frac{dx}{[x^2+2x+5]^3}$ .
- 9) Calcular:  $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$ ;  $\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ ;  $\int_0^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx$ ,  $m, n \in \mathbf{N}$ .
- 10) Sea  $f$  continua en  $\mathbf{R}$  y sea  $F$  una primitiva de  $f$ . ¿Si  $f$  es impar, es necesariamente  $F$  par? ¿Si  $f$  es par, es necesariamente  $F$  impar? ¿Si  $f$  es periódica es necesariamente  $F$  periódica?
- 11) Hallar el área de la región acotada entre el eje  $x$  y la gráfica de la función  $f(x) = |x^3 - 1| - 2$ .
- 12) Hallar el área de la menor de las dos regiones acotadas por las curvas  $x^2 + y^2 = 2$  y  $x = y^2$ .
- 13) Calcular el área de la región interior a la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
- 14) Hallar el área de la región encerrada entre la curva  $y = x^4$  y la recta tangente a la curva en el punto de abscisa  $x = a > 0$ .
- 15) Hallar el área de la región acotada comprendida entre  $y=0$ , la curva  $x^2 + y^2 = 4$  y la tangente a la curva en  $(1, -\sqrt{3})$ .
- 16) Hallar el valor mínimo, si existe, de  $S(x) = \int_0^x |x^3 - x| \, dx$ .
- 17) Determinar si es mayor o menor el área encerrada por la gráfica de las funciones i)  $f(x) = e^{-x/2}$ , ii)  $g(x) = e^{-x^2}$  y el eje de las  $x$  en el intervalo  $[0,1]$  o en el intervalo  $[1, \infty)$ .
- 18) Considérese la región del cuarto cuadrante limitada por la gráfica de  $f(x) = -e^{-ax}$  ( $a > 0$ ) y el eje  $x$ .  
 Probar que la recta tangente a  $f(x)$  en  $x=0$  divide dicha región en dos partes de igual área.
- 19) Describir las gráficas de las funciones: a)  $r = a \sin \theta$ , b)  $r = a \sec \theta$ , c)  $r = \cos 2\theta$ , d)  $r = |\cos 2\theta|$ .
- 20) Hallar el área de la región acotada encerrada entre el eje  $x$  y la gráfica de la función  $h(x) = 1 - |x-1|$ , integrando en coordenadas i) cartesianas, ii) polares.
- 21) Hallar el área comprendida entre las espirales  $r = 2e^{-\theta}$  y  $r = e^{-\theta}$  si i)  $\theta \in [0, 2\pi]$ , ii)  $\theta \in [0, \infty)$ .
- 22) Hallar la longitud de las curvas: i)  $y = \log x$ ,  $x \in [1, e]$ ; ii)  $y = x^{2/3}$ ,  $x \in [0, 1]$ .

- 23) Supongamos que  $f(x) = 3$  si  $x \in [0, b]$ . ¿Qué ocurre con el valor medio de  $f$  en  $[0, b]$  cuando  $b \rightarrow \infty$ ? Justificarlo.
- 24) Sea una varilla de longitud  $L$  situada en el eje  $x$  con un extremo en el origen. Hallar su centro de gravedad y su momento de inercia respecto del origen si su densidad es  $\rho(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq L/2 \\ L^2/4 & \text{si } L/2 < x \leq L \end{cases}$ .
- 25) Dada  $F(x) = \frac{x}{2\sqrt{\log t + t}}$ . Determinar si converge la integral impropia  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ . Hallar (si existe) el  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(2x)}{F(x)}$ .
- 26) Sea  $g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 7}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$ . Calcular la primitiva  $G(x)$  de  $g(x)$  que cumple  $G(0) = -1$ . Probar que  $g(x) > 1$  si  $x \in [0, 1]$  y que hay un único  $c \in (0, 1)$  tal que  $G(c) = 0$ . Determinar si converge la integral impropia  $\int_{2+}^3 \sqrt{g(x)} dx$ .
- 27) Una partícula avanza por el eje  $x$  con velocidad  $v(t) = t(1+t^2)^a$  m/s en el instante  $t$ . Si inicialmente está en el origen, ¿para qué valores de  $a$ : i) recorre 1m antes de 1 segundo, ii) recorre 1m en un tiempo finito, iii) alcanza cualquier punto del semieje positivo en tiempo finito?
- 28) Aproximar  $\log 2 = \frac{2}{1} \frac{dx}{x}$  utilizando las fórmulas de los trapecios ( $n=2$ ,  $n=4$ ) y Simpson ( $n=2$ ,  $n=4$ ; o sea,  $m=1$ ,  $m=2$ ).
- 29) Aproximar  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ,  $\int_0^1 \sqrt{x^4+1} dx$  e  $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$  utilizando Taylor y Simpson.
- 30) Calcular  $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ . Probar que  $\frac{4}{27} < \int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx < \frac{1}{3}$ .
- 31) Estudiar para qué valores enteros de  $n$  se verifica que  $3 < \int_0^1 \frac{nx}{4+x^4} dx < 4$ .
- 32) Hallar el valor de la integral  $I = \int_0^1 \frac{x}{x^4-16} dx$  y un número racional que aproxime  $I$  con error menor que  $10^{-2}$ .
- 33) Sea  $f(x) = \frac{x^2+2}{x^4+4}$ . Hallar una primitiva de  $f$ . Probar que  $\frac{1}{2} < \int_0^1 f < \frac{2}{3}$ .
- 34) Sea  $f(x) = e^{2x-x^2}$ . a) Aproximar  $\int_0^1 f$  utilizando el desarrollo de Taylor de orden 4 en 0 de  $f$ .  
b) Sea  $H(x) = \int_x^{x+1} f$ ,  $x \in [0, 2]$ . Precisar en qué puntos  $x$  alcanza sus valores máximo y mínimo.  
c) Calcular el límite de  $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$  i) cuando  $x \rightarrow 0$ , ii) cuando  $x \rightarrow \infty$ .
- 35) El perímetro de una elipse de eje mayor  $2a$  y excentricidad  $k$  viene dado por  $L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta$ .  
Evaluar  $L$  integrando término a término el desarrollo de la raíz en potencias de  $k^2 \sin^2 \theta$ .  
Hallar aproximadamente el perímetro de la elipse  $3x^2 + 4y^2 = 12$  ( $k^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$ ).



## CALCULO I

## grupo E

## PROB 6

- 1) Escribir los complejos: i)  $-5i$ ,  $-3-i\sqrt{3}$ ,  $-$ ,  $4-3i$ , en la forma  $re^i$ .  
 ii)  $3e^{-3-i}$ ,  $4\cos\frac{\pi}{6}-4i\sin\frac{\pi}{6}$ ,  $e^{i\sin 2}$ ,  $i^{765432}$ , en la forma  $a+bi$ .
- 2) Calcular:  $\frac{1}{i} + \frac{3}{1+i}$ ,  $(-\sqrt{3}+i)^{10}$ ,  $(\frac{1-i}{1+i})^5$ ,  $\sqrt[4]{-16e^{i/3}}$ ,  $|e^{3-i}|^{2+i}|$ .
- 3) Si  $z=x+iy$ , escribir la parte real y la parte imaginaria de:  $z+\bar{z}+z\cdot\bar{z}$ ,  $z^{-2}$ ,  $e^{iz}$ .
- 4) Determinar si las siguientes igualdades son ciertas para todo  $z$  complejo:  
 $2\operatorname{Re}(z)=z+\bar{z}$ ,  $\operatorname{Re}(z\cdot w)=\operatorname{Re}(z)\cdot\operatorname{Re}(w)$ ,  $|z|=|\bar{z}|$ ,  $z^2=|z|^2$ ,  $\operatorname{sen}(2z)=2\operatorname{sen}z\cos z$
- 5) Resolver las ecuaciones:  $z^2+iz+2=0$ ,  $z^3+8=0$ ,  $z^4-16z^2+100=0$ ,  $e^z=1$ ,  $\cos z=4$ .
- 6) Representar los complejos que satisfacen:  $z-\bar{z}=i$ ,  $|z-1|=|z+1|$ ,  $|z-1|=2|z+1|$ ,  $|e^z|=\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Arg}(z^3)=\frac{\pi}{2}$ .
- 7) Estudiar si  $f(z)=|z|$  y  $g(z)=|z|^2$  son continuas y derivables en  $z=0$ .
- 8) Estudiar si la función  $f(z)=\sqrt{z}$  que hace corresponder a cada  $z$  la raíz con argumento principal más pequeño es continua en todo el plano complejo.
- 9) Demostrar que  $e^{z+w}=e^ze^w$ . Probar que  $f(z)=e^z$  toma todos los valores complejos menos el 0, que no es inyectiva y que tiene periodo  $2\pi i$ .
- 10) Definimos  $\ln z = \ln|z|+i\operatorname{Arg}(z)$ ,  $z \neq 0$  [ $\operatorname{Arg}(z)$  es el argumento principal de  $z$ ]. Comprobar que  $e^{\ln z}=z$ .  
 Hallar  $\ln 1$ ,  $\ln(2i)$ ,  $\ln(1+i)$ ,  $\ln(1-i)$ . Estudiar la continuidad de  $\ln z$ .
- 11) Probar que si  $z, w \in \mathbb{C}$  entonces  $||z|-|w|| \leq |z-w|$ .  
 Probar que si la sucesión compleja  $\{a_n\}$  converge entonces también lo hace la sucesión real  $\{|a_n|\}$ .
- 12) Hallar (si existe) el límite de las siguientes sucesiones de complejos:  
 $2^{-n/2}(1+i)^n$ ,  $(1+5i)^n(3+2i)^n$ ,  $2^{-n}(1+i)^n(1-i)^{-n}$ ,  $(n-i)^3n^{-3}$ ,  $e^{in/(n+1)}$ ,  $e^{(2-i)/n}$ ,  $e^{-ne^i}$ .
- 13) Determinar si convergen las series:  
 $\frac{(4-3i)^n}{n!}$ ,  $\frac{1-ni}{n^2}$ ,  $e^{i/n}$ ,  $\frac{i^n}{n^2}$ ,  $\frac{(-i)^n}{\sqrt{n}}$ ,  $\frac{1}{[2-e^{in}]n^2}$
- 14) Estudiar si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$  converge cuando i)  $z=\frac{4-3i}{5+i}$ , ii)  $z=e^{-3-i}$
- 15) Determinar la región del plano complejo en que converge la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{e^n+n}$ .
- 16) Hallar el radio de convergencia de las series de potencias complejas:  
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n^3}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{n^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n n^n z^n}{2^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^n}{n+1}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n+1}$   
 ¿Convergen estas series para  $z=i$ ,  $z=-i$ ,  $z=(1-i)^2$ ,  $z=1+ie$ ,  $z=\frac{1}{5}e^{i|7+3i|}$ ?
- 17) Desarrollar en serie de Taylor, determinando el radio de convergencia:  $\frac{3z}{1+z-2z^2}$ ,  $\operatorname{sen} z \cos z$ ,  $\frac{\operatorname{sen}^2 z}{z}$ ,  $\frac{e^z}{1+z}$ .